ГРУППЫ, КОЛЬЦА И МОДУЛИ

1. Цель освоения дисциплины

Сформировать систематизированные знания по теориям групп, колец и модулей.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Группы, кольца и модули» относится к вариативной части блока дисциплин и является дисциплиной по выбору.
Освоение данной дисциплины является необходимой основой для последующего изучения дисциплин «Оптические свойства наноструктур», «Теория решеток и ее приложения».

3. Планируемые результаты обучения

В результате освоения дисциплины выпускник должен обладать следующими компетенциями:
– способен использовать современные цифровые технологии в научно-исследовательской деятельности, владеть навыками составления и оформления научно-технической документации, научных отчетов, обзоров, докладов и статей (ПКР-4).

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать
– основные разделы теории групп, классические факты, утверждения и методы этой предметной области;
– классические примеры групп;
– основные разделы теории колец, классические факты, утверждения и методы этой предметной области;
– основные разделы теории идеалом в коммутативных кольцах;
– основные разделы теории модулей, классические факты, утверждения и методы этой предметной области;
– классические примеры модулей;

уметь
– использовать знания по теории групп в математической практике;
– представлениями о связи теории абелевых групп с другими алгебраическими системати;
– использовать знания по теории колец в математической практике;
– решать типовые задачи из теории коммутативных колец;
– решать типовые задачи из теории модулей;

владеть
– представлениями о связи теории групп с другими алгебраическими системати;
– классические примеры абелевых групп;
– представлениями о связи теории колец с другими алгебраическими системами;
– навыками решения типовых в теории некоммутативных колец;
– представлениями о связи теории модулей с другими алгебраическими системати.

4. Общая трудоёмкость дисциплины и её распределение

количество зачётных единиц – 2,
общая трудоёмкость дисциплины в часах – 72 ч. (в т. ч. аудиторных часов – 12 ч., СРС – 60 ч.),
распределение по семестрам – 2,

форма и место отчётности – .

5. Краткое содержание дисциплины

Группы, подгруппы, гомоморфизмы. Абелевы группы.
Различные определения группы. Примеры групп. Ближайшие свойства из определения групп. Подгруппы. Операции над подгруппами. Классы смежности по подгруппе. Теорема Лагранжа. Нормальные делители. Операции над нормальными делителями. Фактор-группа. Гомоморфизмы групп. Ядро и образ гомоморфизма. Естественный гомоморфизм, Основная теорема о гомоморфизмах групп. Группы подстановок. Знакопеременная группа. Теорема Кэли. Степень и порядок элемента. Свойства степеней и порядка. Циклические подгруппы. Изоморфизм циклических групп. Цикличность подгруппы и фактор-группы циклической группы. Нормализатор подмножества группы. Нормализатор подгруппы и элемента. Свойства нормализатора. Примеры. Классы сопряженных элементов и сопряженных подгрупп, их свойства. Примеры. Теорема о равномощности класса сопряженности и фактор-группы по нормализатору представителя этого класса. Центр группы и подгруппы. Порождающие множества подгруппы и группы. Коммутатор двуз элементов группы, его свойства. Коммутант двух подгрупп, его свойства и примеры. Коммутант группы. Теорема о минимальности коммутанта группы среди нормальных подгрупп, фактор-группы по которым абелевы. Полугруппа эндоморфизмов группы. Группы автоморфизмов и внутренних автоморфизмов группы. Нормальность подгруппы внутренних автоморфизмов в группе автоморфизмов. Внешние автоморфизмы. Примеры. Расширение группы с помощью группы автоморфизмов. Голоморф группы. Действие группы на множество. Орбита элемента. Стационарная подгруппа. Теорема о равномощности орбиты. Декартово и прямое произведение групп, примеры. Свободные абелевы группы. Признак свободной абелевой группы. Ранг и база абелевой группы. Свойства базы. Свободность подгруппы в свободной абелевой группе. Конечно порожденные абелевы группы, их разложения в прямую сумму бесконечных циклических и примарных циклических групп. Строение конечных абелевых групп. Примеры. Полные абелевы группы. Примеры. Теорема об изоморфизме произвольной абелевой группы и подгруппы полной абелевой группы. Выделение полной абелевой подгруппы в прямое слагаемое абелевой группы. Периодические абелевы группы. Примеры. Первая и вторая теоремы Прюфера элемента и фактор-группы по стационарной подгруппе. Примеры действия группы на множества: сопряжение и левый сдвиг. Определение Силовских подгрупп. Три теоремы Силова. Примеры Силовских подгрупп.

Кольца и связанные с ними алгебраические системы. Простые идеалы в коммутативных кольцах. Некоммутативные кольца..
Определения, примеры и простейшие свойства полугрупп, групп, колец, булевых колец, булевых алгебр. Подкольца, гомоморфизмы и идеалы. Простые и максимальные идеалы коммутативного кольца. Свойства. Радикал (Джекобсона) и первичный радикал кольца, их свойства. Полное кольцо частных коммутативного кольца. Кольца частных коммутативных полупервичных колец. Пространства простых идеалов. Примитивные кольца. Радикалы. Вполне приводимые модули. Вполне приводимые кольца. Артиновы и нетеровы кольца. Поднятие идемпотентов. Локальные и полусовершенные кольца

Модули, прямые произведения и прямые суммы.
Понятие левого (правого) модуля над кольцом. Примеры. Прямое произведение модулей. Прямая (внешняя) сумма модулей, свойства. Классические теоремы об изоморфизмах модулей. Композиционный ряд модуля. Артиновы (нетеровы) модули. Примеры. Основные свойства артиновых (нетеровых) модулей.

6. Разработчик

Щучкин Николай Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физики ФГБОУ ВО «ВГСПУ».